



Lisbon School  
of Economics  
& Management  
Universidade de Lisboa

# Estatística I

Licenciatura em Gestão e Licenciatura em Finanças  
2.º Ano/2.º Semestre  
2023/2024

# Aulas Teóricas N.º 6 e 7 (Semana 4)

**Docente:** Elisabete Fernandes

**E-mail:** efernandes@iseg.ulisboa.pt



<https://doity.com.br/estatistica-aplicada-a-nutricao>



<https://basiccode.com.br/produto/informatica-basica/>

# Conteúdos Programáticos

Aulas Teóricas  
(Semanas 1 a 3)

- **Capítulo 2:**  
Probabilidades

Aulas Teóricas  
(Semanas 3 a 5)

- **Capítulo 3:** Variáveis  
Aleatórias  
Unidimensionais

Aulas Teóricas  
(Semanas 5 a 7)

- **Capítulo 4:** Variáveis  
Aleatórias  
Multidimensionais

Aulas Teóricas  
(Semanas 8 a 13)

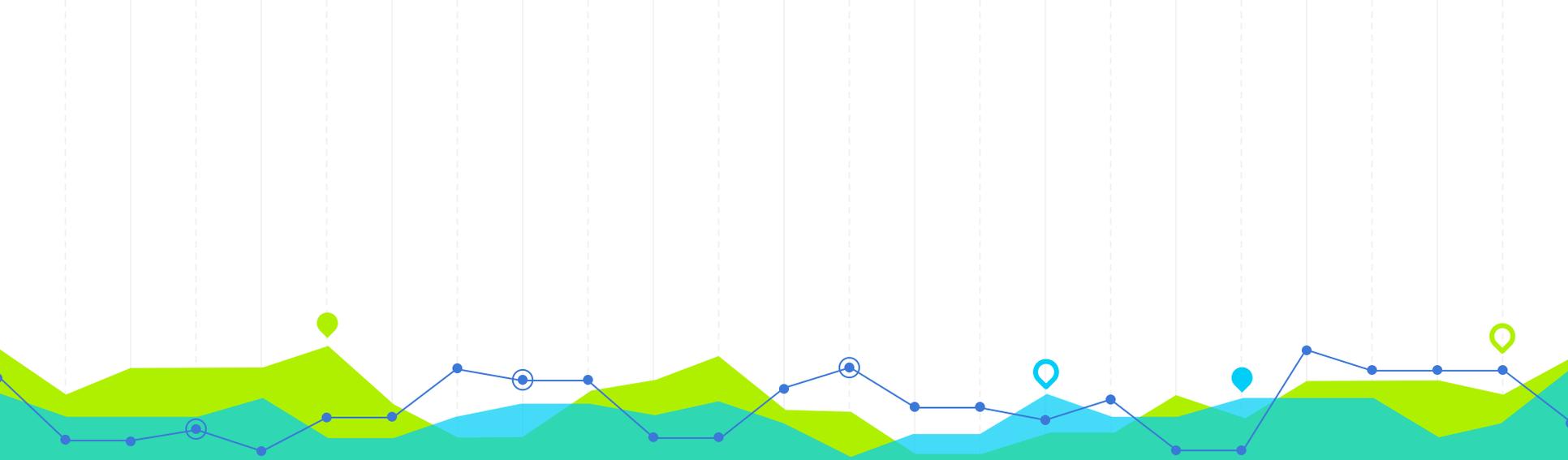
- **Capítulo 5:**  
Distribuições Teóricas
- **Capítulo 6:**  
Amostragem.  
Distribuições por  
Amostragem.

**Material didático:** Exercícios do Livro Murteira et al (2015), Formulário e Tabelas Estatísticas

**Bibliografia:** B. Murteira, C. Silva Ribeiro, J. Andrade e Silva, C. Pimenta e F. Pimenta; *Introdução à Estatística*, 2ª ed., Escolar Editora, 2015.

<https://cas.iseg.ulisboa.pt>

Aula 4	<b>Início do Capítulo 2:</b> variável aleatória, definição e exemplos. Função de distribuição. Propriedades.
Aula 5	Classificação de variáveis aleatórias. V.a. discreta: Função probabilidade: propriedades e exemplos. V.a. contínua: Função densidade de probabilidade: propriedades e exemplos.
Aula 6	V.a. mistas, exemplo. Funções de uma v.a.: método para v.a. discretas e método geral. Exemplos.
Aula 7	Funções de uma v.a. Valor esperado de uma v.a. discreta e valor esperado de uma v.a. contínua. Exemplos. Valor esperado de uma função de uma v.a.: caso discreto.



# Variáveis Aleatórias Discretas

Variável Aleatória, Função de Distribuição, Função Massa de Probabilidade, Valor Esperado, Moda, Variância e Quantis

1

# Variável Aleatória

Uma função  $X$  que associa a cada elemento  $w$  do espaço amostral  $\Omega$  um valor  $x \in \mathbf{R}$  é denominada de *variável aleatória (v.a.)*.

Experiência: lançar um 1 dado duas vezes e observar o resultado  
(**P** = par e **I** = ímpar)

$X$ : número de vezes que saiu um n° par em 2 lançamentos do dado



**Definição:** *Uma variável aleatória é uma aplicação do espaço dos possíveis em  $\mathbb{R}$ .*

$$\begin{aligned} X : \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\rightarrow X(\omega) = x \end{aligned}$$

Slides do Professor Manuel Scotto do IST

# Tipos de Variáveis Aleatórias

Uma variável aleatória pode ser classificada em:

- Variável aleatória **discreta**
- Variável aleatória **contínua**

# Variável Aleatória Discreta

Uma **v.a.** é **discreta** quando o conjunto de valores possíveis que ela assume for **finito** ou **numerável de possibilidades**.

# Variável Aleatória Discreta: Exemplo 1

Considere-se o sexo (característica) das crianças em famílias com três filhos ( $M$ : masculino e  $F$ : feminino).

**Espaço amostral:**

$$\Omega = \{(MMM), (MMF), (MFM), (FMM), (MFF), (FMF), (FFM), (FFF)\}$$

$\omega_1$        $\omega_2$        $\omega_3$        $\omega_4$        $\omega_5$        $\omega_6$        $\omega_7$        $\omega_8$

Defina-se a v.a.  $X$ : nº de crianças do sexo masculino ( $M$ ).

$\Omega$	$MMM$	$MMF$	$MFM$	$FMM$	$MFF$	$FMF$	$FFM$	$FFF$
$X$	3	2	2	2	1	1	1	0

→ Então  $X$  assume valores no conjunto  $\{0, 1, 2, 3\}$ , logo é uma **variável aleatória discreta**.

# Variável Aleatória Contínua

Uma **v.a.** é **contínua** quando o conjunto de valores possíveis que ela assume for **não enumerável**.

# Variável Aleatória Contínua: Exemplo



Considere-se o tempo de vida, em horas, das lâmpadas produzidas por uma fábrica.

Defina-se a v.a.  $T$ : tempo de vida, em horas, de uma lâmpada que foi escolhida, ao acaso, da fábrica.

→ Então,  $T$  é uma **variável aleatória contínua** que assume qualquer valor real não negativo.

# Função Massa de Probabilidade

**Função massa de probabilidade (f.m.p):** É a função que atribui a **cada valor  $x_i$  da v. a. discreta  $X$**  a sua probabilidade de ocorrência e pode ser representada pela tabela:

$x$	$x_1$	$x_2$	...	$x_n$
$P(X=x)$	$P(X=x_1)$	$P(X=x_2)$	...	$P(X=x_n)$

Uma função massa de probabilidade deve satisfazer:

$$0 \leq P(X = x_i) \leq 1 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^n P(X = x_i) = 1$$

# Função Massa de Probabilidade: Exemplo 1

Defina-se a v.a.  $X$ : nº de crianças do sexo masculino em famílias com três filhos ( $M$ : masculino e  $F$ : feminino).

$\Omega$	$MMM$	$MMF$	$MFM$	$FMM$	$MFf$	$FMF$	$FFM$	$FFF$	Acontecimentos independentes
$X$	3	2	2	2	1	1	1	0	
$x$	0		1		2		3		Acontecimentos equiprováveis
$P(X = x)$	1/8		3/8		3/8		1/8		

# Função Massa de Probabilidade: Resumindo...

- **Função de probabilidade de uma variável discreta X:**

Se X é uma v.a. discreta, que assume valores distintos  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ , então a função de probabilidade (f.p.) de X é definida como

$$f(x) = p(x) = \begin{cases} P[X = x] & \text{se } x = x_i \\ 0 & \text{se } x \neq x_i \end{cases}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \dots$$

e deve satisfazer as seguintes condições:

1.  $0 \leq f(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R};$
2. Se n finito,  $\sum_{i=1}^n f(x_i) = 1.$

Caso n infinito,  $\sum_{i=1}^{\infty} f(x_i)$  terá de ser uma série convergente de soma 1.

Ao conjunto de pares ordenados  $(x_i, f(x_i))$ ,  $i = 1, 2, \dots, n, \dots$ , designa-se por **distribuição de probabilidades da variável aleatória**.

## Variável Aleatória Discreta: Exemplo 2

O Departamento de Estatística é formado por 35 professores, sendo 21 homens e 14 mulheres. Uma comissão de 3 professores será constituída sorteando, ao acaso, três membros do departamento.

Qual é a probabilidade da comissão ser formada por ***pelo menos duas mulheres?***

Vamos definir a v.a.

$X$ : n° de mulheres na comissão.

Quais são os possíveis valores que  $X$  pode assumir?

# Variável Aleatória Discreta: Exemplo 2

Espaço amostral

Probabilidade

$X$

(HHH)	$\frac{21}{35} \times \frac{20}{34} \times \frac{19}{33} = 0,203$	0
(HHM)	$\frac{21}{35} \times \frac{20}{34} \times \frac{14}{33} = 0,150$	1
(HMH)	$\frac{21}{35} \times \frac{14}{34} \times \frac{20}{33} = 0,150$	1
(MHH)	$\frac{14}{35} \times \frac{21}{34} \times \frac{20}{33} = 0,150$	1
(HMM)	$\frac{21}{35} \times \frac{14}{34} \times \frac{13}{33} = 0,097$	2
(MHM)	$\frac{14}{35} \times \frac{21}{34} \times \frac{13}{33} = 0,097$	2
(MMH)	$\frac{14}{35} \times \frac{13}{34} \times \frac{21}{33} = 0,097$	2
(MMM)	$\frac{14}{35} \times \frac{13}{34} \times \frac{12}{33} = 0,056$	3

Acontecimentos dependentes

## Função Massa de Probabilidade: Exemplo 2

$x$	0	1	2	3
$P(X = x)$	0,203	0,450	0,291	0,056

Assim, tem-se  $P(X \geq 2) = P(X=2) + P(X=3) = 0,291 + 0,056 = 0,347$ .

## Variável Aleatória Discreta: Exemplo 3

Um dado é lançado duas vezes, de forma independente. Qual é a probabilidade da **soma dos pontos nos dois lançamentos ser menor do que 6**?

$$\Omega = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), \\ (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), \\ (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), \\ (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), \\ (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), \\ (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}.$$

*Qual é a probabilidade de cada ponto  $w_i$  de  $\Omega$  ?*

Admitindo que o dado é perfeitamente homogêneo e sendo os lançamentos independentes,

$$P(w_i) = 1/36, \text{ qualquer } w_i \in \Omega.$$

# Função Massa de Probabilidade: Exemplo 3

Função massa de probabilidade de  $X$ :

$x$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X=x)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

		2º. lançamento					
		1	2	3	4	5	6
1º. Lançamento	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

$X$ : Soma dos pontos nos dois lançamentos do dado

## Função Massa de Probabilidade: Exemplo 3

$X$ : soma dos pontos nos dois lançamentos do dado.

Função massa de probabilidade de  $X$ :

$x$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X=x)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Então, a probabilidade da soma dos pontos nos dois lançamentos ser menor do que 6 é

$$\begin{aligned}P(X < 6) &= P(X=5) + P(X=4) + P(X=3) + P(X=2) \\ &= 4/36 + 3/36 + 2/36 + 1/36 \\ &= 10/36 = 0,278\end{aligned}$$

# Função Massa de Probabilidade: Outros Exemplos

Podemos estar interessados em outras variáveis aleatórias definidas para o mesmo espaço amostral.

$Y$ : valor máximo obtido nos dois lançamentos do dado.

$y$	1	2	3	4	5	6
$P(Y = y)$	1/36	3/36	5/36	7/36	9/36	11/36

$Z$ : diferença entre os pontos do 2º e do 1º lançamento do dado.

$z$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$P(Z = z)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

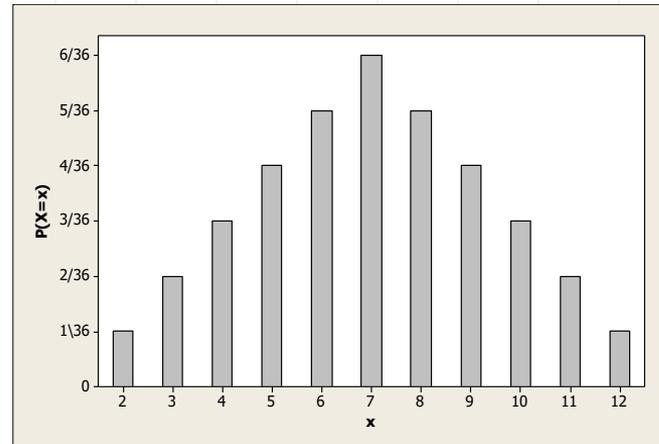
# Variável Aleatória Discreta: Exemplo 3

Qual é o valor médio da soma dos pontos ( $X$ ) no lançamento de dois dados?

$\Omega = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$

$\Rightarrow$  36 pontos igualmente prováveis

$x$	$P(X=x)$
2	1/36
3	2/36
4	3/36
5	4/36
6	5/36
7	6/36
8	5/36
9	4/36
10	3/36
11	2/36
12	1/36



Representação algébrica e gráfica da função massa de probabilidade da v.a.  $X$

# Variável Aleatória Discreta: Valor Médio

**Valor Esperado (média populacional):** Dada a v.a.  $X$ , assumindo os valores  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , chamamos de **valor médio**, **valor esperado** ou **esperança matemática de  $X$**  o valor

$$E(X) = x_1 \times P(X = x_1) + \dots + x_n \times P(X = x_n) = \sum_{i=1}^n x_i \times P(X = x_i)$$

Notação:  $\mu = E(X)$

Seja  $X$  uma variável aleatória discreta que assume valores em  $\mathcal{R}_X$  com função de probabilidade  $p(x)$  e  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função. Temos então que

$$\mathbb{E}[g(X)] = \sum_{x_i \in \mathcal{R}_X} g(x_i) p(x_i) = \sum_{x_i \in \mathcal{R}_X} g(x_i) \mathbb{P}(X = x_i)$$

## Valor Médio da V.a. Discreta: Exemplo 3

$x$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X=x)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

No exemplo, para média da v.a.  $X$  (soma de pontos), tem-se:

$$\begin{aligned} E(X) &= 2 \times (1/36) + 3 \times (2/36) + \dots + 11 \times (2/36) + 12 \times (1/36) \\ &= 252/36 = 7, \end{aligned}$$

ou seja, em média, a soma dos pontos no lançamento dos dois dados é igual a 7.

# Variável Aleatória Discreta: Variância

**Variância:** É o valor esperado da v.a.  $(X - E(X))^2$ , ou seja, se  $X$  assume os valores  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , então

$$\text{Var}(X) = \sum_{i=1}^n [x_i - E(X)]^2 \times P(X = x_i)$$

Notação:  $\sigma^2 = \text{Var}(X)$ .

Da relação acima, tem-se que

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$



# Variável Aleatória Discreta: Desvio Padrão

**Desvio Padrão:** É definido como a raiz quadrada positiva da variância, isto é,

$$DP(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}.$$

Notação:  $\sigma = DP(X)$ .



## Variância da V.a. Discreta: Exemplo 3

$x$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X=x)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= (2-7)^2 \times \frac{1}{36} + (3-7)^2 \times \frac{2}{36} + \dots + (11-7)^2 \times \frac{2}{36} + (12-7)^2 \times \frac{1}{36} \\ &= \frac{210}{36} = 5,83.\end{aligned}$$

Alternativamente, poderíamos calcular

$$\begin{aligned}E(X^2) &= 2^2 \times \frac{1}{36} + 3^2 \times \frac{2}{36} + \dots + 11^2 \times \frac{2}{36} + 12^2 \times \frac{1}{36} \\ &= \frac{1974}{36} = 54,83\end{aligned}$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

e, portanto,  $\text{Var}(X) = 54,83 - 7^2 = 5,83$ .

# Propriedades do Valor Médio e Variância

1) Se  $X = a$ , em que  $a$  é uma constante, então

$$E(X) = a \quad \text{e} \quad \text{Var}(X) = 0.$$

2) Se  $Y = aX + b$ , em que  $a$  e  $b$  são constantes, então

$$E(Y) = E(aX + b) = aE(X) + b$$

e

$$\text{Var}(Y) = \text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X).$$

# Propriedades do Valor Médio e Variância (Cont.)

3) Sejam  $X$  e  $Y$  duas variáveis quaisquer, então

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y).$$

P4. Sejam  $n$  variáveis aleatórias  $X_1, \dots, X_n$ . Então,

$$E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n).$$

4) Sejam  $X$  e  $Y$  duas variáveis independentes, então

$$\text{Var}(X+Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y).$$

P4) Sejam  $X_1, \dots, X_n$  variáveis aleatórias independentes. Então,

$$\text{Var}(X_1 + \dots + X_n) = \text{Var}(X_1) + \dots + \text{Var}(X_n).$$

# Momentos

- **Definição 3.9 – Momento de ordem  $k$  em relação à origem**

$$\mu'_k = E(X^k) \quad (\text{se existir})$$

Observações:

- Trata-se do valor esperado da função  $\psi(X) = X^k$ .
- No caso discreto  $E(X^k) = \sum_{x \in D} x^k f_X(x)$  enquanto no caso contínuo

$$E(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f_X(x) dx$$

- **Definição 3.10 – Momento de ordem  $k$  em relação à média**

$$\mu_k = E[(X - \mu)^k] \quad (\text{se existir})$$

# Variável Aleatória Discreta: Moda

**Moda:** A moda de uma variável aleatória discreta  $X$ , designada por  $mo$ , corresponde ao ponto de máximo da função massa de probabilidade de  $X$

$$mo = \max_x P(X = x).$$

A moda de uma variável aleatória discreta **nem sempre é única.**

# Variável Aleatória Discreta: Covariância

**Definição 4.2.1:** Sejam  $X$  e  $Y$  variáveis aleatórias integráveis. Então a covariância entre  $X$  e  $Y$  é definida por

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))],$$

**Teorema 4.2.1:** Sejam  $X_1, \dots, X_n$  variáveis aleatórias integráveis. Então,

$$\text{Var} \left( \sum_{i=1}^n X_i \right) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) + 2 \sum_{i < j} \text{Cov}(X_i, X_j).$$

Em particular se  $\text{Cov}(X_i, X_j) = 0$  para  $i \neq j$  então

$$\text{Var} \left( \sum_{i=1}^n X_i \right) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i)$$

**Definição 4.2.2:** Seja  $X$  e  $Y$  variáveis aleatórias integráveis então o coeficiente de correlação entre  $X$  e  $Y$  é dado por

$$\rho(X, Y) := \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \mathbb{E} \left[ \left( \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma_X} \right) \left( \frac{Y - \mathbb{E}(Y)}{\sigma_Y} \right) \right]$$

**Proposição 4.2.1:** O coeficiente de correlação é independente da escala e translação da variáveis, ou seja,

$$\rho(X, Y) = \rho(aX + b, cY + d)$$

# Função de Distribuição

- **Função de distribuição de uma variável aleatória discreta X:**

Define-se função de distribuição (f.d.) de uma variável aleatória X como

$$F(x) = P[X \leq x].$$

Esta função tem domínio  $\mathbb{R}$ , conjunto de chegada  $[0, 1]$  e verifica as seguintes propriedades:

1.  $0 \leq F(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R};$
2.  $F(x_1) \leq F(x_2), \forall x_1, x_2: x_1 < x_2$  (é uma função monótona não decrescente);
3.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1;$
4.  $P[x_1 < X \leq x_2] = F(x_2) - F(x_1), \forall x_1, x_2: x_1 < x_2.$

A **Função distribuição** é uma função contínua à direita.

Elementos de Estatística e Probabilidades II ([uevora.pt](http://uevora.pt))

# Função de Distribuição: Notas

1.  $P(X \in B) = \sum_{x_i \in B} f_X(x_i);$

2.  $F_X(x) = \sum_{x_i \leq x} f_X(x_i);$

3.  $f_X(x) = F_X(x) - F_X(x^-)$ , onde  $F_X(x^-) \equiv P(X < x)$ ;

4.  $P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) + f_X(a)$ ;

5.  $P(a < X < b) = F_X(b) - F_X(a) - f_X(b)$ ;

6.  $P(a \leq X < b) = F_X(b) - F_X(a) - f_X(b) + f_X(a)$ ;

7.  $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$ .

# Função Massa de Probabilidade: Exemplo 4

$X$  = número de vezes que saiu cara em três lançamentos de uma moeda,

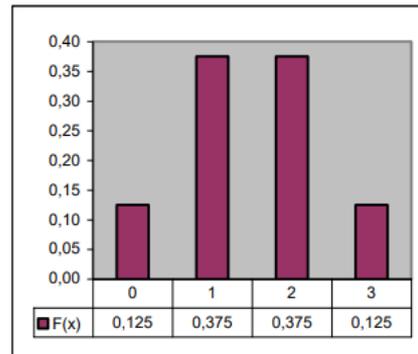
$$P[X = 0] = P[(C \cap C \cap C)] = \frac{1}{8}$$

$$P[X = 1] = P[(F \cap C \cap C) \cup (C \cap F \cap C) \cup (C \cap C \cap F)] = \frac{3}{8}$$

$$P[X = 2] = P[(F \cap F \cap C) \cup (F \cap C \cap F) \cup (C \cap F \cap F)] = \frac{3}{8}$$

$$P[X = 3] = P[(F \cap F \cap F)] = \frac{1}{8}$$

$x$	0	1	2	3
$f(x)$	1/8	3/8	3/8	1/8



Elementos de Estatística e  
Probabilidades II (uevora.pt)

# Função de Distribuição: Exemplo 4

$$F(0) = P[X \leq 0] = \sum_{x \leq 0} f(x) = \frac{1}{8};$$

$$F(1) = P[X \leq 1] = \sum_{x \leq 1} f(x) = \frac{4}{8}$$

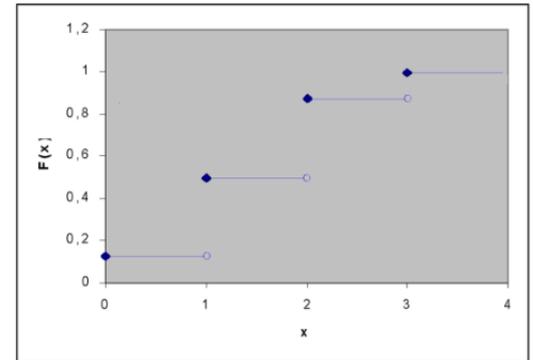
$$F(2) = P[X \leq 2] = \sum_{x \leq 2} f(x) = \frac{7}{8}$$

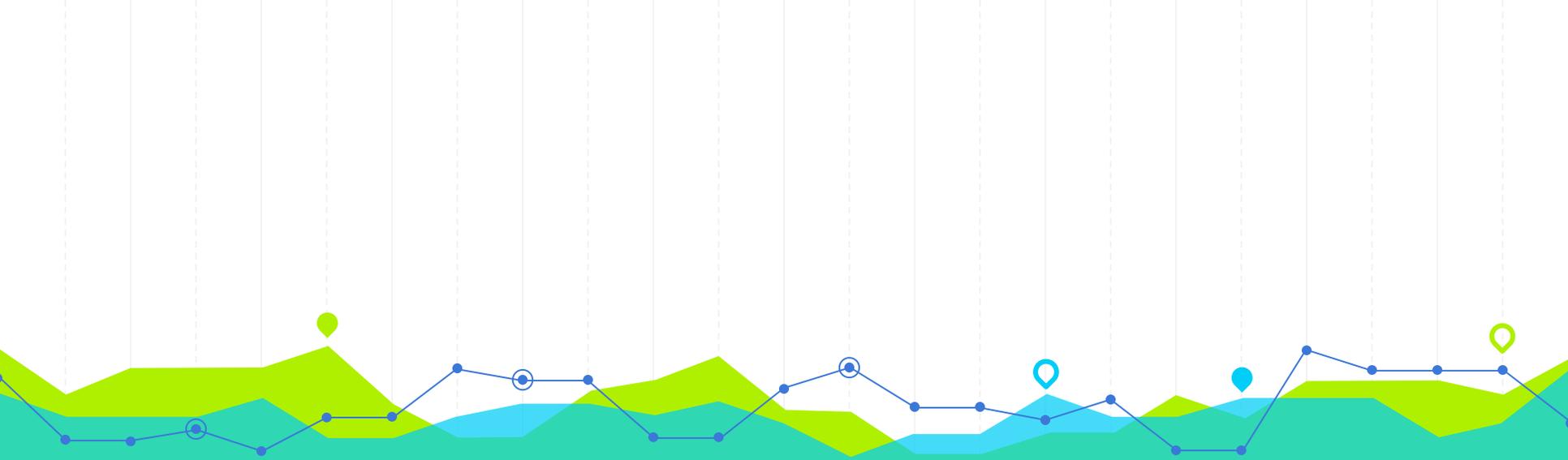
$$F(3) = P[X \leq 3] = \sum_{x \leq 3} f(x) = 1$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{8}, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{4}{8}, & 1 \leq x < 2 \\ \frac{7}{8}, & 2 \leq x < 3 \\ 1, & x \geq 3 \end{cases}$$

A representação gráfica da função distribuição de uma variável aleatória é "em escada"

Elementos de Estatística e Probabilidades II (uevora.pt)





# Variáveis Aleatórias Discretas: Exercícios

Variável Aleatória, Função de Distribuição, Função Massa de Probabilidade, Valor Esperado, Moda, Variância e Quantis

# 2

**3.2** Numa fábrica existem três máquinas iguais de uma mesma marca, que trabalham independentemente. A probabilidade de cada máquina avariar num dado espaço de tempo é 0.1. Seja  $X$  a variável aleatória que representa o número de máquinas que findo esse período de tempo estão a trabalhar. Determine:

- (a) A função de probabilidade de  $X$ .
- (b) A função de distribuição de  $X$ .
- (c) O valor esperado, moda, mediana e variância de  $X$ .



# Exercício 3.2 (a): Variável Aleatória

- **Experiência aleatória**

Classificação de 3 máquinas (que funcionam de forma independente) quanto a estarem avariadas ( $A$ ) ou não ( $\bar{A}$ ).

- **Eventos chave**

$A$  = máquina avariada

$\bar{A}$  = máquina a trabalhar

- **Probabilidades**

$$P(A) = 0.1$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.1 = 0.9$$

- **Espaço de resultados**

$$\Omega = \{AAA, \bar{A}AA, A\bar{A}A, AA\bar{A}, \bar{A}\bar{A}A, \bar{A}A\bar{A}, A\bar{A}\bar{A}, \bar{A}\bar{A}\bar{A}\}.$$

$AAA \equiv A_1 \cap A_2 \cap A_3$  (1a., 2a. e 3a. máquinas avariadas)

etc.

$$\#\Omega = 2^3 = 8 \text{ (eventos elementares)}$$

- **V.a. de interesse**

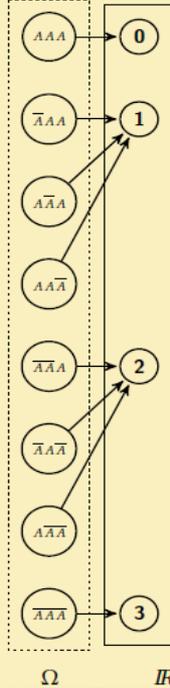
$X$  = número de máquinas que findo o período estão a trabalhar

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_X$$

# Exercício 3.2 (a): Contradomínio da V.a.

- **Contradomínio e representação esquemática de  $X$**

Atendendo ao número de máquinas, os valores possíveis de  $X$  são 0, 1, 2, 3, i.e.,  $\mathbb{R}_X = \{0, 1, 2, 3\}$ .



## Exercício 3.2 (a): Função Massa de Probabilidade

$$\begin{aligned}P(X = 0) &= P(\text{nenhuma máquina a trabalhar}) \\ &= P(\text{três máquinas avariadas}) \\ &= P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\ &= P(A_1) \times P(A_2) \times P(A_3) && \text{[eventos completamente independentes]} \\ &= 0.1^3 && \text{[eventos equiprováveis]} \\ &= 0.001\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(X = 1) &= P(1 \text{ máquina a trabalhar}) \\ &= P(\text{duas máquinas avariadas}) \\ &= P\left(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}\right) + P\left(A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3\right) + P\left(\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3\right) \\ &= P(A_1) \times P(A_2) \times P(\overline{A_3}) + P(A_1) \times P(\overline{A_2}) \times P(A_3) + P(\overline{A_1}) \times P(A_2) \times P(A_3) \\ &&& \text{[eventos completamente independentes]} \\ &= 3 \times (1 - 0.1) \times 0.1^2 && \text{[eventos equiprováveis]} \\ &= 0.027\end{aligned}$$

## Exercício 3.2 (a): Função Massa de Probabilidade

$$P(X = 2) = P(2 \text{ máquinas a trabalhar})$$

$$= P(1 \text{ máquina avariada})$$

$$= P(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) + P(\bar{A}_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3) + P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3)$$

$$= P(A_1) \times P(\bar{A}_2) \times P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1) \times P(A_2) \times P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1) \times P(\bar{A}_2) \times P(A_3)$$

[eventos completamente independentes]

$$= 3 \times 0.1 \times (1 - 0.1)^2 \times$$

[eventos equiprováveis]

$$= 0.243$$

$$P(X = 3) = P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3)$$

$$= P(\bar{A}_1) \times P(\bar{A}_2) \times P(\bar{A}_3)$$

[eventos completamente independentes]

$$= (1 - 0.1)^3$$

[eventos equiprováveis]

$$= 0.729.$$

## Exercício 3.2 (a): Função Massa de Probabilidade

- **Ep. de X (cont.)**

$$P(X = x) = \begin{cases} 0.001, & x = 0 \\ 0.027, & x = 1 \\ 0.243, & x = 2 \\ 0.729, & x = 3 \\ 0, & \text{outros valores de } x \end{cases}$$

- **Obs.** — Alternativamente, poderíamos tirar partido do facto de  $X \sim \text{Binomial}(n = 3, p = 0.9)$ , logo

$$P(X = x) \stackrel{\text{form.}}{=} \binom{3}{x} 0.9^x (1 - 0.9)^{3-x}, \quad x = 0, 1, 2, 3.$$

Escusado será dizer que obteríamos o mesmo resultado.

Seja  $X$  uma variável aleatória discreta assumindo valores em  $R_X = \{x_1, x_2, \dots\}$

A função (massa de probabilidade) de  $X$  é dada por

$$f_X(x) = P(X = x) = \begin{cases} P(X = x_i), & x = x_i \in R_X \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$0 \leq f_X(x) \leq 1, \quad \forall x \in \mathcal{R}$$

$$\sum_{x \in \mathcal{R}} f_X(x) = 1$$

A distribuição Binomial será abordada mais à frente!!!

## Exercício 3.2 (b): Função de Distribuição

- **Ed. de X**

Comecemos por preencher a tabela abaixo com alguns valores da f.d. de X.

$x$	$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i)$
-0.5	$F_X(-0.5) = P(X \leq -0.5) = 0$
0	$F_X(0) = P(X \leq 0) = P(X = 0) = 0.001$
0.3	$F_X(0.3) = P(X \leq 0.3) = P(X = 0) = 0.001$
1	$F_X(1) = P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0.001 + 0.027 = 0.028$
1.4	$F_X(1.4) = P(X \leq 1.4) = P(X \leq 1) = 0.028$
2	$F_X(2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0.001 + 0.027 + 0.243 = 0.271$
2.8	$F_X(2.8) = P(X \leq 2) = 0.271$
3	$F_X(3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$ $= 0.001 + 0.027 + 0.243 + 0.729 = 1$
10.5	$F_X(10.5) = P(X \leq 3) = 1$



Podemos então concluir que:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0.001, & 0 \leq x < 1 \\ 0.028, & 1 \leq x < 2 \\ 0.271, & 2 \leq x < 3 \\ 1, & x \geq 3. \end{cases}$$

## Exercício 3.2 (c): Valor Esperado e Moda

- Valor esperado de  $X$

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x=0}^3 x \times P(X = x) \\ &= 0 \times 0.001 + 1 \times 0.027 + 2 \times 0.243 + 3 \times 0.729 \\ &= 2.7 \end{aligned}$$

$$P(X = x) = \begin{cases} 0.001, & x = 0 \\ 0.027, & x = 1 \\ 0.243, & x = 2 \\ 0.729, & x = 3 \\ 0, & \text{outros valores de } x \end{cases}$$

- Moda de  $X$

Represente-se a moda de  $X$  por  $mo(X)$ . Então

$$mo(X): P[X = mo(X)] = \max_{x \in \{0,1,2,3\}} P(X = x).$$

Atendendo a que  $P(X = 3) = 0.729$  é superior a qualquer dos restantes valores da f.p. de  $X$ , temos que o valor mais frequente de  $X$  é efectivamente  $mo(X) = 3$ .

## Exercício 3.2 (c): Mediana

- **Mediana de  $X$**

Represente-se a mediana de  $X$  por  $me(X)$ . Então

$$me(X) : \frac{1}{2} \leq F_X[me(X)] \leq \frac{1}{2} + P[X = me(X)] \quad (1)$$

$$F_X[me(X)^-] \leq \frac{1}{2} \leq F_X[me(X)]. \quad (2)$$

Ora, tirando partido da definição de mediana em (1) e do facto de

$$\frac{1}{2} \leq F_X(3) \stackrel{(a)}{=} 1 \leq \frac{1}{2} + P(X=3) = \frac{1}{2} + 0.729 = 1.229,$$

concluimos que  $me(X) = 3$ .

Em alternativa, notemos que

$$F_X(3) = P(X \leq 3) \stackrel{(a)}{=} 1 \geq \frac{1}{2};$$

mais, de uma consulta da f.d. de  $X$  tem-se

Podemos então concluir que:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0.001, & 0 \leq x < 1 \\ 0.028, & 1 \leq x < 2 \\ 0.271, & 2 \leq x < 3 \\ 1, & x \geq 3. \end{cases}$$

## Exercício 3.2 (c): Mediana

$$F_X(3^-) = F_X(2) = 0.271 \leq \frac{1}{2}.$$

Logo

$$F_X(3^-) \leq \frac{1}{2} \leq F_X(3),$$

pele que o resultado (2) leva-nos a concluir que  $me(X) = 3$ .

Podemos então concluir que:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0.001, & 0 \leq x < 1 \\ 0.028, & 1 \leq x < 2 \\ 0.271, & 2 \leq x < 3 \\ 1, & x \geq 3. \end{cases}$$

## Exercício 3.2 (c): Variância

- **Variância de  $X$**

Como o valor esperado de  $X$  é igual a  $E(X) = 2.97$  e o 2o. momento de  $X$  é dado por

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{x=0}^3 x^2 \times P(X = x) \\ &= 0^2 \times 0.01 + 1^2 \times 0.027 + 2^2 \times 0.243 + 3^2 \times 0.729 \\ &= 7.56, \end{aligned}$$

segue-se que

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - E^2(X) \\ &= 7.56 - 2.7^2 \\ &= 0.27. \end{aligned}$$

$$P(X = x) = \begin{cases} 0.001, & x = 0 \\ 0.027, & x = 1 \\ 0.243, & x = 2 \\ 0.729, & x = 3 \\ 0, & \text{outros valores de } x \end{cases}$$

- **Obs.** — Alternativamente, poderíamos ter tirado partido do facto de  $X \sim \text{Binomial}(n = 3, p = 0.9)$  e concluir que

$$\begin{aligned} E(X) &\stackrel{\text{form.}}{=} np = 3 \times 0.9 = 2.7 \\ V(X) &\stackrel{\text{form.}}{=} np(1-p) = 3 \times 0.9 \times (1-0.9) = 0.27. \end{aligned}$$

# Obrigada!

Questões?

